第 1 章
常微分方程式入門

数学者は対象を研究するのではなくて，対象間の関係を研究する。
実質は問題とせずに，形式だけに関心をもつ。

H. POINCARÉ, "Science et Hypothèse".

序

本章の初めの部分，即ち第1節から第7節までは，1変数の微分方程式に関する基本定理の概観を与える。まず第1節で単純な求積法によつて解くことのできる最も簡単な形の微分方程式から始め，第3及び第4節では1階の微分方程式の理論の大要を述べる。さらに第6節では微分方程式の数値解法について論じ，第7節には高階の微分方程式の一般的事項を述べ，最後の数節は線型微分方程式，特に定数係数の方程式とその特殊解法について頁をさいた。

1. 積分の基本問題

微分方程式の最も簡単な例は，

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{1.1}$$

という形の関係式で，これを解くことは1次導函数が独立変数の与えられた函数 $f(x)$ に等しいような函数 $y(x)$ を求めることである。ただし $f(x)$ は1価函数で連続であると仮定する。

(1.1) 式の解は**定積分** (definite integral) $\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ の上限 x に関す

に二つの定数 α, β をきめてやると

$$\alpha=\frac{y_2-y_0}{2h}$$

$$\beta=\frac{y_2+y_0-2y_1}{2h^2}$$

となり，この放物線弧と x 軸との間の面積は

$$\int_a^{a+2h}\eta\,dx=\int_a^{a+2h}y_1\,dx+\alpha\int_a^{a+2h}[x-(a+h)]\,dx+\beta\int_a^{a+2h}[x-(a+h)]^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}(y_0+4y_1+y_2)\,h$$

となる。同様にして3点 $(a+2h, y_2)$，$(a+3h, y_3)$，$(a+4h, y_4)$ の組について，これらの3点を通る放物線弧と x 軸との間の面積を計算すると $\frac{1}{3}(y_2+4y_3+y_4)\,h$ となり，以下 $(a+4h)$ から $(a+6h)$ まで，$(a+6h)$ から $(a+8h)$ までというように次々の区間についても同様である。各の放物線弧は $2h$ づつの巾をもつから，ab という範囲を**偶数** n 個の巾 h の等間隔の区分に分割すれば，a から b までの全曲線 $y=f(x)$ は $\frac{n}{2}$ 個の放物線弧で近似され，従つて積分 (2.1) を表わす面積はこれらの放物線弧の下の面積の総和で近似されることになる。即ち

$$S=\frac{h}{3}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots\cdots+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)]$$

$$=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n] \tag{2.4}$$

で，区分の数 n は**偶数**とする。この公式は **Simpson の法則**として知られている。

これらの公式の近似度はいうまでもなく間隔 h の大きさによつて支配される。また各の間隔 h の間の曲線 $y=f(x)$ を高次の多項式で近似することによつて Simpson の法則よりもつと正確な公式をつくることもできるけれども*，工学においては大抵の場合 Simpson の法則で十分であろう。

例題　π の値は積分

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=[\tan^{-1}x]_0^1$$

によつて与えられる。この積分の値を計算するために，$x=0$ と $x=1$ の間の函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$ の値を間隔 $h=0.25$ として計算してみると，$y_0=1.00000000$, $y_1=0.94117647$, $y_2=0.80000000$, $y_3=0.64000000$, $y_4=0.50000000$ となる。

そこで梯形法則を用いると

$$\frac{\pi}{4}=0.25\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+y_3+\frac{1}{2}y_4\right]$$

から $\pi=3.13117647$ となり，Simpson の法則によれば

$$\frac{\pi}{4}=\frac{0.25}{3}\left[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+y_4\right]$$

から $\pi=3.14156896$ となるが，一方小数第8位までの真値は $\pi=3.14159265$ である。近似式で求めた上の二つの値を比較してみると，梯形法則による値は小数第1位しか正しくないが，Simpson の法則によれば小数第4位まで正しい結果となり，後者の方が優秀であることを示している。間隔をもつと小さくして $h=0.1$ とすると，梯形法則では $\pi=3.13992597$，Simpson の法則では $\pi=3.14159260$ となり，後者による値はこんどは小数第7位まで正しくなるが，一方梯形法則による値は大してよくなつていない。

3.　1階の微分方程式

1階の微分方程式とは，独立変数 x，未知函数 $y(x)$ 及びその1次導函数 $\frac{dy}{dx}$ の間に次のような関係のあるものをいう。

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{3.1}$$

明かに (1.1) 式はこのような関係をなすものの中で最も簡単な場合であ

* 例えば J. B. Scarborough, "Numerical Mathematical Analysis," 117—152 頁参照。

と交わるすべての積分曲線は同じ傾斜を有する(第1.2図)。それ故任意の点 x_0, y_0 から出発して，各縦座標と (1.1) 式で定められる傾斜で交るように，点 x_0, y_0 を通る連続曲線を引けば，点 x_0, y_0 を通る積分曲線が得られる。この曲線の方程式は 前に示したように$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ である。 $f(x)$ は1価函数と仮定してあるからこのような曲線は唯一つに限られる。x_0, y_0 を変えることによつてこのような積分曲線は無数に引くことができるが，それらは明かに媒介変数一つの等距離の曲線群をなす。

2. 積分の数値計算

方程式 (1.1) の解は

$$S=\int_a^b f(x)\,dx \tag{2.1}$$

という形の定積分を計算して得られるが，この積分の値は次のようにして近似的に求めることができる。即ち ab という範囲を $b-a=nh$ となるように巾 h の n 個の等区分に分割すれば (第2.1図)，二つの隣り合つた縦座標

$$y_r=f(a+rh)$$
$$y_{r+1}=f[a+(r+1)h]$$

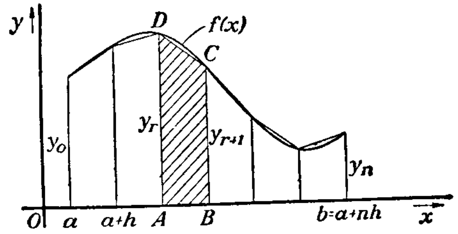
によつて囲まれた梯形 $ABCD$ の面積は，$\frac{1}{2}(y_r+y_{r+1})h$ となる。定積分 (2.1) を表わす総面積は近似的に縦座標 y_0, y_1, ……, y_n によつて作られるすべての梯形の面積の和に等しく，

$$S=\frac{1}{2}[(y_0+y_1)+(y_1+y_2)+\cdots\cdots+(y_{n-1}+y_n)]h$$

即ち

$$S=\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\cdots\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right)h \tag{2.2}$$

である。公式 (2.2) は梯形法則 (trapezoidal rule) として知られており，これは等間隔の縦座標の間にある曲線 $y=f(x)$ の各部分を直線で近似することを意味している。

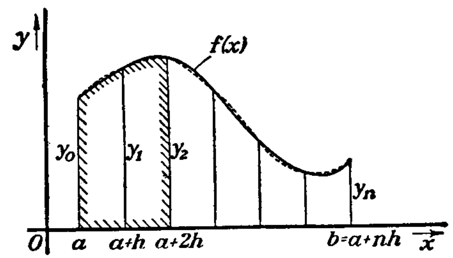


第2.1図 積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を梯形法則によつて求めること。

この定積分の値をもつと正確に求めるには，曲線 $y=f(x)$ の各部分を直線のかわりに連続した放物線弧で近似する方法が考えられ，それを **Simpson の法則**という。

例えば $a\leqq x\leqq a+2h$ の間にある曲線部分を考えよう。a, $a+h$ 及び $a+2h$に対応する縦座標をそれぞれ y_0, y_1 及び y_2 とすれば(第2.2図)，点 $(a+h,\ y_1)$ を通る任意の放物線の方程式は

$$\eta=y_1+\alpha[x-(a+h)]+\beta[x-(a+h)]^2 \tag{2.3}$$



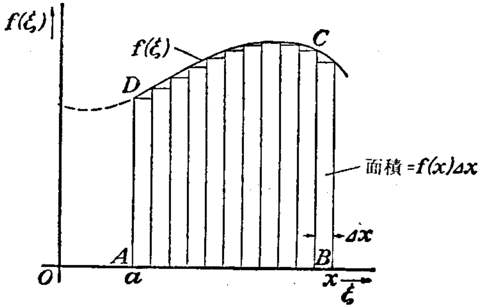
第2.2図 $\int_a^b f(x)\,dx$ を Simpson の法則によつて求めること。

という形をとる。この曲線が2点 $(a,\ y_0)$ 及び $(a+2h,\ y_2)$ を通るよう

る微係数が $f(x)$ に等しいという積分の基本定理によつて与えられる。ここに下限 a は任意の定数である。実際に $f(\xi)$ を ξ の函数として図示すると（第 1.1 図），方程式のこの定積分は ξ 軸，$f(\xi)$ を縦座標とする曲線，及び $\xi=a$ と $\xi=x$ における縦座標 AD 及び BC によつて囲まれた面積 $ABCD$ に等しく，この面積 $ABCD$ は第 1.1 図に図示したように小さな矩形の和の極限として定義することができる。いま上限を Δx だけ増せば面積は $f(x)\,\Delta x$ だけ増加するから，上限 x の函数として考えたこの積分の導函数は (1.1) 式における $f(x)$ に等しく，従つて

$$y(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi \tag{1.2}$$

は微分方程式 (1.1) の解にほかならない。この場合のように与えられた函数を積分することによつて微分方程式の解が得られるとき，その方程



第1.1図　定積分の幾何学的意義

式は**求積法** (quadrature) または**直接積分** (direct integration) によつて解くことができるという。

解　$y=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ を x の函数として図示すると微分方程式(1.1) のいわゆる**積分曲線** (integral curve) が得られ，この積分曲線は点 $x=a$, $y=0$ を通る。任意の点 $x=x_0$, $y=y_0$ を通る積分曲線を得るためには，

$y=y_0+\int_{x_0}^x f(\xi)\,d\xi$ と書けばよい。x_0 を変化しても積分はある定数だけ変化するにすぎないから，$f(x)$ の定義される領域内に原点 $\xi=0$ を選べば

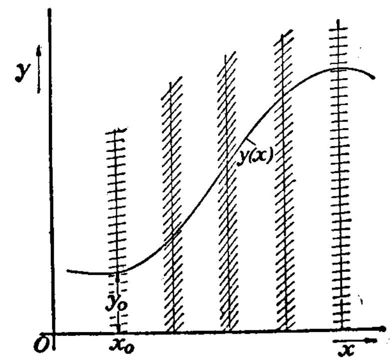
$$y=\int_0^x f(\xi)\,d\xi+C \tag{1.3}$$

と書くことができ，ここに C は任意の定数である。

記号を簡単にするために，混同を生じない限り上限 x の函数である定積分を一般に $\int_0^x f(x)\,dx$ と書くことにする。

任意定数 C を含む (1.3)式を方程式(1.1)の**一般解** (general solution) といい，C の特別な値に対応する任意の函数 $y(x)$ を (1.1)の**特解** (particular solution) という。一般解は**媒介変数一つ** (one-parameter)の曲線群を表わし，いまの場合は等距離の同形の曲線群である。

方程式 (1.1) の解を求める他の方法としては，導函数についての基本的な幾何学的意義に基く方法がある。(1.1) 式は積分曲線の傾斜が横座



第 1.2 図　点 x_0, y_0 を通る積分曲線の作図

標 x の与えられた函数に等しいということを示し，従つて同一の縦座標